RAFAEL BARRETT

C O N F E R E N C I A S

FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS

EL CONCEPTO DEL ESPACIO

El COMPLEJO carácter, a la vez empírico y racional, que da su fuerza a la geometría, quita vigor a sus fundamentos. Tantas más convenciones preliminares necesita una ciencia, cuantos más son los elementos que roba al mundo sensible. La crítica moderna ha examinado los axiomas sobre los cuales descansa el edificio geométrico, ha precisado su verdadero papel, y, revolucionando las ideas antiguas, ha echado bases nuevas, más rigurosas y más amplias. De esas bases os quiero hablar, y especialmente del famoso postulado de Euclides.

El postulado de Euclides, indispensable a la teoría de las paralelas, suele enunciarse así: *Por un punto exterior a una recta no se la puede trazar más que una paralela.*

Euclides no demostró esta proposición: la llamó *postulado:* verdad que se debe admitir, verdad casi evidente. Durante cerca de veintitrés siglos de esfuerzos, nadie ha conseguido probar que esta verdad no es una mentira. Hoy, a pesar de las demostraciones que todavía reciben alguna vez las academias, estamos capacitados para declarar:

1º Que el postulado de Euclides no tiene demostración posible, porque no es una verdad analítica.
2º Que el postulado de Euclideano es tampoco un axioma o juicio sintético *priori.*
3º Que el postulado de Euclides no es tampoco una verdad experimental.
4º Que el postulado de Euclides es sencillamente un *convenio.*

Dicho de otra manera; que somos dueños de aceptarlo o de rechazarlo, sin temor de llegar jamás a contradicción alguna. Si convenimos en aceptar el postulado de Euclides construiremos la geometría llamada "euclideana". Si convenimos en rechazarlo, construiremos las llamadas "no euclideanas", tan conformes a la más inflexible lógica como la primera.

La gloria de este descubrimiento, que tanta luz arroja sobre la filosofía de las matemáticas, corresponde a Lowatchewski, ruso, y Bolyai, húngaro, que a principios del siglo xix sentaron la imposibilidad de la demostración del postulado y crearon, prescindiendo de él, la geometría llamada de *Lowatchewski.*

Riemann, en su célebre memoria *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen,* que ha inspirado los trabajos modernos de Beltrami, Helmholtz y M. Poincaré, no sólo prescinde del postulado de Euclides, sino de este otro: "por dos puntos no se puede hacer pasar más que una recta", y crea otra geometría, la llamada *de Riemann.*

Existen, pues, tres geometrías:
Una euclideana: la vulgar o de Euclides.
Otras no euclideanas: la geometría de Lowatchewski y la geometría de Riemann.

Deseo hacer ver en qué consisten esencialmente, y hacer comprender su legitimidad.

El espacio con que se razona es muy diferente del espacio con que se experimenta… Se sostendrá, y hasta admito, que el espacio geométrico ha salido del espacio sensible. Lo cierto es que esa formación ha concluido, que hoy el espacio geométrico es independiente del espacio sensible y no tiene nada que recibir de él ni nada que darle. Si la realidad física cambiara, siempre nos arreglaríamos para interpretarla en el espacio con que hoy razonamos y, si quisiéramos, nos arreglaríamos para interpretar la realidad física actual en un espacio geométrico distinto....

Las sensaciones no se miden. Forman un continuo, no sólo inmedible, lo que desde luego las separa del continuo geométrico, sino esencialmente absurdo.

Me explicaré:

Se ha observado, por ejemplo, que una distancia A de 10 m. y otra B de 11 m. producen sensaciones iguales y que la distancia B tampoco se distingue de una distancia C de 12 m. En cambio se nota fácilmente que la distancia C es mayor que la A. Los resultados brutos de la experiencia se expresarán por las relaciones:

$$A=B \qquad B=C \qquad C>A$$

que pueden considerarse como la fórmula del continuo físico. Son disparatadas.

Hay en ellas un desacuerdo intolerable con el principio de contradicción y *es la necesidad de hacer cesar ese desacuerdo,* dice hondamente Poincaré, *lo que nos ha obligado a inventar el continuo matemático.*

Respecto a las dimensiones del espacio no se trata de una cuestión de medida, sino de calidad... El espacio geométrico es un continuo muy distinto del continuo sensible, como hemos verificado. Con la *continuidad* damos a entender que se pasa de un lugar a otro del espacio, por una serie de elementos indistinguibles, indiscernibles los unos de los otros. Estos elementos, a los que no atribuimos ninguna idea de extensión, de cantidad y sin los cuales la palabra *continuidad* carecería de sentido, se llaman *puntos*.

Guardémonos muy bien de afirmar que una superficie, que una línea, son un conjunto de puntos. Nó: eso sería lo contrario de un continuo. En un conjunto de puntos cada uno de ellos existe por sí, y se distingue de los demás. En una línea, en una superficie, en el espacio, los puntos son indiscernibles. Es imposible separar cualquiera de ellos del inmediato. En realidad no hay inmediato: entre dos puntos, por próximos que estén, queda siempre el continuo, encerrando una infinidad de puntos. En una palabra, podemos tomar del espacio cuantos puntos queramos: el espacio mismo, el continuo, no habrá sido tocado y seguirá idéntico a lo que era.

Consideremos un continuo geométrico e intentemos dividirlo en dos regiones. Es claro que la frontera común de esas dos regiones contendrá puntos y que nada nos impide considerarlos.

Pues bien, se dice que un continuo geométrico es espacio de una dimensión, es una *línea,* cuando para dividirlo en dos regiones distintas basta un *punto.*

Se dice que un espacio es de dos dimensiones es una *superficie,* cuando para dividirlo en dos regiones basta una *línea* o espacio de una dimensión.

Se dice que un espacio es de tres dimensiones, cuando para dividirlo en dos regiones distintas basta una *superficie o* espacio de dos dimensiones.

El espacio geométrico se ha concebido de tres dimensiones. Es éste un hecho extraño.

¿Tres precisamente, y no dos, o cuatro? Pregunta que no se hizo Kant, porque no era matemático como Leibnitz. Pregunta que tampoco se hizo Leibnitz, porque no era tan filósofo como Kant.

¿Existe una cuarta dimensión?

Contesto resueltamente que sí: Existe exactamente de la misma manera que el espacio euclideano, de la misma manera que existen las líneas, las superficies y los puntos. Existe en la razón. Y en la razón todo lo que se concibe con precisión existe; y sigue existiendo mientras no conduzca por los caminos de la lógica a una contradicción insoluble. Eso no ocurre con la cuarta dimensión, ni con la quinta ni con la vigésima. Todos los días se descubren teoremas del espacio de cuatro dimensiones, tan teoremas como los otros. Esa cuarta dimensión no la podemos pintar con la tiza, es cierto; pero, ¿acaso pintamos nunca algo geométrico? ¿Pintamos rectas y círculos? En el plano del papel, ¿pintamos siquiera el espesor de los objetos mismos? La cuarta dimensión no habrá sido inspirada directamente por el mundo sensible, estaremos privados de nuestras habituales imágenes groseras e infecundas. No importa, este nuevo espacio es el más autentico de todos…

Voy a poner un ejemplo que aclarará las ideas. Supongamos un ser condenado a vivir en la superficie del pizarrón, y a moverse sin salir jamás de ella. El Universo, para ese ser, se reducirá a un espacio de dos dimensiones Supongamos que nuestro ente *superficial* ha pintado dos "eses" en esta disposición:

Con ello no se ha salido un instante de su universo. Imaginemos ahora que intenta hacer coincidir las dos *eses* de igual tamaño y de idéntica forma; ¿lo conseguirá?

Es evidente que no. Para conseguirlo tendría que *sacar* una de ellas del pizarrón, es decir, del espacio, darla vuelta y aplicarla sobre la otra, lo cual hemos prohibido al plantear el problema.

Es exactamente lo que nos pasa a nosotros cuando nos empeñamos en meter la mano derecha en el guante de la mano izquierda. Los dos guantes son de igual tamaño, de idéntica forma, como las *eses* del pizarrón, pero, como ellas, *están colocados de un modo distinto respecto al espacio.* Para meter la mano derecha en el guante de la mano izquierda, ¿qué habrá que hacer? Muy sencillo: "se sacará el guante del espacio de tres dimensiones, y se le dará vuelta con la cuarta dimensión". ¿Me diréis que en la práctica es imposible? No lo sé. Lo que sé es que mi razón no ve en ello inconveniente alguno, y que la geometría está hecha de razón, y nada más que de razón.

Para explicar las geometrías de Lowatchewski y de Riemann, valgámonos de la noción de curvatura, como más intuitiva, logrando así evitar el empleo del análisis.

Parece extraño que el espacio infinito, el hueco sin fondo, cuyo silencio espantaba a Pascal, pueda tener forma.

Sabemos (no obstante) que el espacio de una dimensión, la línea, puede tener innumerables formas. La recta no es el círculo, ni la elipse e ni la espiral.

Sabemos que el espacio de dos dimensiones, la superficie, pede tener innumerables formas, El plano, no es la esfera, ni el cono es el hiperboloide. Lo que estaría contra la razón es que el espacio de tres dimensiones no tuviera también innumerables formas...

Se supone, en la geometría corriente, que una figura geométrica no cambia de tamaño ni de forma, por el simple hecho de ser transportada de un lugar a otro.

Pues bien, esto no es indispensable. Se puede suponer lo contrario, sin llegar a ningún absurdo…

Sea el espacio lineal. Se trata de superponer de hacer coincidir los segmentos AB y CD, sin sacarlos de la línea en cuestión. ¿Se alterará la forma de esos segmentos al ser transportados? Es claro que no se alterará en aquellas líneas que tengan *curvatura constante:* rectas, arcos de círculo o hélices...

Lo mismo se dirá de las superficies. Para transportar en ellas, sin salirse de ellas, figuras cuya forma no se altere, es necesario que las superficies tengan también "curvatura uniforme".

Conocemos tres clases de superficies de curvatura uniforme:

1º El plano, cuya curvatura es nula.
2º Las esferas, o aplicables sobre esferas, cuya curvatura uniforme es positiva.
3º Las superficies de curvatura uniforme negativa.

No olvidemos esas tres clases de superficies, porque corresponden respectivamente a las geometrías de Euclides, de Riemann, y de Lowatchewski.

Pasemos al espacio de tres dimensiones. Afirmar que se conserva intacta la forma de las figuras al ser transportadas en él, es afirmar que el espacio geométrico de tres dimensiones es de *curvatura uniforme.*

Existen tres clases de espacio de *curvatura uniforme*:

1º El isótropo o de curvatura nula — espacio de Euclides.
2º El de curvatura uniforme positiva — espacio de Riemann.
3º El de curvatura uniforme negativa — espacio de Lowatchewski.

En cualquiera de ellos se concibe una línea más sencilla que las demás, la denominada provisionalmente *línea* *recta*, definida por dos puntos. Se concibe también una superficie más sencilla que las demás, la denominada provisoriamente *plano,* definida por tres puntos.

Elegimos (por ejemplo) el espacio de Euclides, de curvatura nula. El plano y la recta de Euclides serán también de curvatura nula.

Supongamos que elegimos el espacio de Riemann, de curvatura positiva. El plano de Riemann será también de curvatura positiva: una esfera. La recta de Riemann será también de curvatura positiva: un arco de círculo máximo. Pero los círculos máximos sobre la esfera se cortan siempre, etc.; luego:

1º En la geometría de Riemann *no hay paralelas.*
2º En la geometría de Riemann *por dos puntos puede pasar* (caso de los polos) *una infinidad de rectas.*

Supongamos ahora que elegimos el espacio de Lowatchewski. El plano de Lowatchewski será una superficie de curvatura negativa, cóncava y convexa a la vez, en la cual las rectas de Lowatchewski resultan arcos que divergen indefinidamente, huyendo por la doble comba opuesta. La divergencia aumenta con la distancia y con la pequeñez del ángulo que formen los arcos.

Tendremos entonces que será posible, en la geometría de Lowatchewski, trazar por un punto exterior a una recta muchas rectas que no la corten, es decir, muchas paralelas.

Es de notar que los espacios de Euclides y de Lowatchewski son infinitos y el de Riemann, finito. Lo infinito del espacio no es una necesidad de la razón, sino un "convenio". He aquí algo que no sospechaba Kant…

1º En la geometría de Euclides, por un punto exterior a una recta no se la puede trazar más que *una paralela;*
2º En la geometría de Lowatchewski se puede trazar *infinitas.*
3º En la geometría de Riemann no se puede trazar *ninguna.*

Somos dueños de elegir la geometría que queramos.

Teorema de la geometría de Euclides: la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.

Teorema análogo de la geometría de Riemann: la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos.

Teorema de la geometría de Lowatchewski la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos.

Los tres teoremas son verdaderos. No se contradicen; como no se contradicen los tres números que expresan una misma longitud medida con el metro, con la toesa o con la vara... Nadie habla de demostrar el metro, de refutar la vara. Esa frase no tiene sentido.

Pues bien, lo mismo pasa con la frase *demostrar el postulado de Euclides.* El postulado y el metro no se demuestran. No se demuestra una convención. Se usa si es cómoda.

¿Por qué la razón humana prefiere la geometría de Euclides? Porque es la más cómoda.

Se impone al espíritu por su sencillez. Es indudable que razonaríamos sobre los fenómenos naturales en el espacio de Lowatchewski, y que llegaríamos a los mismos resultados en mecánica y en física, pero es indudable también que todo eso sería más complicado, más largo, más difícil de aprender y de practicar. Seguiríamos siendo lógicos impecables, pero perderíamos tiempo.

Hay un detalle que se puede señalar. Hemos visto que en la geometría de Euclides el espacio no tiene ninguna curvatura. Ese espacio es único, es inconfundible, es un individuo. Las otras geometrías, de Lowatchewski y de Riemann, atribuyen al espacio una curvatura uniforme. Pero, ¿cuánto vale esa curvatura constante? Es indeterminada. Los espacios *no euclideanos* son sin número, son géneros y resulta más cómodo para la inteligencia emplear una geometría en que no aparece indeterminada alguna.

Por otra parte, la geometría de Euclides goza de una propiedad curiosa. Así como en el plano es posible estudiar las circunferencias, siendo imposible estudiar las rectas en la esfera, es análogamente posible interpretar los espacios de curvatura, o no euclideanos, en el espacio euclideano, hacer corresponder los teoremas respectivos al modo que se corresponden las palabras de dos idiomas en un diccionarios. Recordando el símil empleado hace un momento, diré que este diccionario no es más que una tabla que me señala cuántos centímetros y milímetros tiene la toesa, o cuántos pies y cuántas pulgadas tiene el metro. Esto bastaría para probar que jamás las tres geometrías pueden contradecirse entre ellas, ni cada una en particular, a no ser que las tres sean absurdas, lo que no es probable.

Preferimos la de Euclides porque esta es, para la inteligencia, el camino más corto. Quizás respondemos al más general y profundo de los instintos naturales: el de la mínima acción, según el cual la naturaleza economiza eternamente sus energías, para lo por venir (1).

(1) Pocos años después de escrito este trabajo tuvo lugar la creación, por Einstein, de la Teoría de la Relatividad generalizada, en la cual el espacio y el tiempo forman un *continuo* geométrico de cuatro dimensiones. En este *continuo* el espacio común es de curvatura positiva, es decir, un espacio de Riemann en el que dicha teoría, interpreta la realidad física actual (N. de los E.)